Херсонський політехнічний коледж
Одеського національного політехнічного університету

Завдання для формування банку олімпіадних завдань

Тема 1. Тотожні перетворення виразів, що містять ірраціональності, модулі, параметри

1. Звільнитися від ірраціональності у знаменнику дробу:
$\dfrac{1}{\sqrt[8]{3}+\sqrt[8]{2}}$ [1]
2. Обчислити суму $\dfrac{1}{1+x+xy}+\dfrac{1}{1+y+yz}+\dfrac{1}{1+z+zx}$, якщо $xyz=1$. [6]
3. Скоротити дріб $\dfrac{x^8+x^4+1}{x^2+x+1}$. [1]
4. Спростити вираз $\sqrt{17-4\sqrt{9+4\sqrt{5}}}$. [1]
5. Обчислити $\dfrac{5\cdot 4^{15}\cdot 9^9-4\cdot 3^{20}\cdot 8^9}{5\cdot 2^9\cdot 6^{19}-7\cdot 2^{29}\cdot 27^6}$. [4]

Тема 2. Раціональні та ірраціональні рівняння та їх системи, рівняння та системи рівнянь з модулями і параметрами

1. Розв’язати рівняння $|x-2|+|x-3|+|2x-8|=9$. [1]
2. Розв’язати рівняння $x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\ldots}}}=16$. [1]
3. Розв’язати рівняння $\sqrt{x-1+2\sqrt{x-2}}-\sqrt{x-2}=0$. [6]
4. Розв’язати систему рівнянь $\begin{cases}x^4+y^4+x^4y^4=33,\\ x-xy+y=1.\end{cases}$ [1]
5. В залежності від значень параметра a розв’язати рівняння $\sqrt{2x+a}=x-2$. [1]

Тема 3. Показникові та логарифмічні функції, рівняння, нерівності та їх системи

1. Знаючи, що $\lg 2=a$, $\log_2 7=b$, знайти $\lg 56$. [8]
2. Розв’язати рівняння $\log_2\left(x^2+7\right)=5+\log_2 x-\dfrac{6}{\log_2\left(x+\dfrac{7}{x}\right)}$. [3]
3. Залежно від параметра a розв’язати нерівність $a^{x+2}-8\cdot a^{x-1}-\dfrac{4}{a}>a+2$. [3]
4. Розв’язати рівняння $\sqrt[x]{x}=\sqrt{x^x}$. [1]

5. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x^{x+y} - y^{12} = 0, \\ y^{x+y} = x^3. \end{cases}$ [1]

Тема 4. Тригонометричні функції, рівняння

1. Розв'язати рівняння $\dfrac{1+\mathrm{tg}x+\mathrm{tg}^2 x+\ldots+\mathrm{tg}^n x+\ldots}{1-\mathrm{tg}x+\ldots+(-1)^n \mathrm{tg}^n x+\ldots} = 1+\sin 2x$, $|\mathrm{tg}\, x| < 1$. [5]
2. Порівняти $\sin 9$ та $\sin 10$. [1]
3. Обчисліть $\dfrac{\sin 1^0 \cdot \sin 2^0 \cdot \sin 3^0 \cdot \ldots \cdot \sin 45^0}{\cos 46^0 \cdot \cos 47^0 \cdot \cos 48^0 \cdot \ldots \cdot \cos 89^0}$. [3]
4. Розв'язати рівняння $4 - 4(\cos x - \sin x) - \sin 2x = 0$. [3]
5. Довести тотожність $\cos\alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \cos 4\alpha \cdot \cos 8\alpha = \dfrac{\sin 16\alpha}{16 \sin\alpha}$ [1]

Тема 5. Похідна та її застосування

1. Спростивши вираз для $f(x)$, знайти $f'(x)$, якщо
$$f(x) = \left(\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}} + \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4}-x+2} \right)^{-2} \left(\frac{x-1}{2(\sqrt{x}+1)} + 1 \right) \cdot \frac{2}{\sqrt{x}+1}.$$ [2]
2. Число 180 розбити на три додатних доданки так, щоб два з них відносились, як 1:2, а добуток трьох доданків був найбільшим. [5]
3. В який круг можна вписати прямокутник найбільшої площі з периметром, який дорівнює 56 см? [5]
4. Знайти найбільший об'єм V конуса із твірною a. [2]
5. В рівнобічній трапеції нижня основа дорівнює l, кут при основі дорівнює α. Діагональ трапеції перпендикулярна до бічної сторони. При якому значенні α площа трапеції буде найбільшою? Знайти найбільшу площу. [2]

Тема 6. Задачі з геометрії

1. Довести, що в трикутнику ABC бісектрису AA_1 можна знайти за формулою
$$AA_1 = \frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c},$$ де $AC = b$, $AB = c$. [7]
2. Точка M поділяє сторону AD прямокутника $ABCD$ у відношенні $1:2$, причому $BM = DM$. Знайти величину кута між діагоналями цього прямокутника. [6]
3. Сторони паралелограма дорівнюють 11 та 23 м, а діагоналі відносяться як $2:3$. Знайти довжини діагоналей. [1]
4. Висота та бісектриса прямокутного трикутника, які виходять з вершини прямого кута, дорівнюють відповідно 6 та 8. Знайдіть площу трикутника. [1]

5. У трикутнику ABC бісектриса кута A перетинає сторону BC в точці D. Через точку D проведено пряму до перетину зі стороною AC в точці E так, що кут CDE рівний куту BAC. Довести, що $BD = DE$. [6]

Тема 7. Евристичні задачі олімпіадного характеру

1. Порівняти 80^{13} та 10^{28}. [1]
2. Обчислити $1000^2 - 999^2 + 998^2 - 997^2 + 996^2 - 995^2 + \ldots + 4^2 - 3^2 + 2^2 - 1^2$.[1]
3. Довести, що $19^{2010} - 1$ ділиться на 5. [1]
4. Довести, що для довільних додатних дійсних чисел a, b, c виконується нерівність $\frac{a^3}{b+2c} + \frac{b^3}{c+2a} + \frac{c^3}{a+2b} \geq \frac{a^2+b^2+c^2}{3}$. [6]

Використані джерела:

1. Балаян Э.Н. 800 лучших олимпиадных задач по математике для подготовки к ЕГЭ: 9-11 классы/ Э.Н. Балаян. –Ростов-н/Д:Феникс, 2013. – 317с.
2. Говоров В.М., Дыбов П.Т., Мирошин Н.В. и др. Сборник конкурсных задач по математике [Текст]: учебное пособие / 2-е изд. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. – 384 с.
3. Журнал «Математика в школах України».
4. Зубилевич Г.И. Сборник задач московских математических олимпиад [Текст]: пособие для учителей 5–8 классов / под ред. К.П. Сикорского. – М., «Просвещение», 1967. – 236 с. с илл.
5. Егерев В.К. и др. Сборник задач по математике для поступающих в вузы [Текст]: сборник задач / под ред. М.И. Сканави. – К.: Канон, 1997. – 528 с.
6. Коваль Т.В. 400 задач з математичних олімпіад. 8–11 класи [Текст]: навчальний посібник / Т.В. Коваль. – Тернопіль: Мандрівець, 2008. – 80 с.
7. Сарана О.А. Математичні олімпіади: просте і складне поруч [Текст]: навчальний посібник / Олександр Анатолійович Сарана. – К.: Видавництво А.С.К., 2004. – 344 с.: іл.
8. Авторські задачі викладача математики Харіфа І.О., м. Кобленець, Германія.

Підготував викладач Сафонова Г.Ф. hptk_matematiki@ukr.net