

**НОВОКАХОВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ КОЛЕДЖ  
ОДЕСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО ПОЛІТЕХНІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ**

**Тема 1. Тотожні перетворення виразів, що містять ірраціональності, модулі, параметри**

1.1. Знайти пари цілих чисел, які задовольняють систему нерівностей:

$$\begin{cases} y - |x^2 - 2x| + \frac{1}{2} > 0 \\ y + |x - 1| < 2 \end{cases} \quad [4]$$

1.2 Розв'язати рівняння  $(x^2 + 1)(y^2 + 1) = (x + y)^2 + 1$  у цілих числах.

**Тема 2. Раціональні та ірраціональні рівняння та їх системи, рівняння та системи рівнянь з модулями і параметрами**

2.1 При яких значеннях параметра  $a$  рівняння

$$(2 + \sqrt{3})^x + (2 - \sqrt{3})^x = 2(a - 1)x^2 + \frac{1}{2}a^2 \quad \text{має єдиний розв'язок} \quad [5]$$

2.2 Знайти найбільше значення параметра  $c$ , при якому система

$$\begin{cases} (x + c\sqrt{3})^2 + y^2 + 6y + 8 = 0; \\ \sqrt{3}|x| + y = 6. \end{cases} \quad \text{має єдиний розв'язок.} \quad [6]$$

2.3 Розв'язати систему рівнянь 
$$\begin{cases} 4x^2 + y^2 + z^2 - 6 = 0, \\ 16x^3 + y^3 + 2z^3 - 12 = 0, \\ 64x^4 + y^4 + 4z^4 - 24 = 0. \end{cases} \quad [2]$$

2.4 Розв'яжіть рівняння  $\sqrt{x + 4} + \sqrt{x - 4} = 2x + 2\sqrt{x^2 - 16} - 12$  [3]

**Тема 3. Показникові та логарифмічні функції, рівняння, нерівності та їх системи**

3.1 При яких дійсних значеннях параметра  $a$ , нерівність

$$3^{2|\sin x|} + 2|a - 2| \cdot 3^{|\sin x|} + a^2 - 1 > 0 \text{ справджується при всіх } x \in R. [4]$$

3.2 Знайдіть усі значення параметра  $p$ , при яких рівняння

$$(p - 4)9^x + (p + 1)3^x + 2p - 1 = 0 \text{ не має розв'язків. } [5]$$

3.3 Розв'яжіть систему рівнянь: 
$$\begin{cases} x^{\log_3 y} + 2y^{\log_3 x} = 27, \\ \log_3 y - \log_3 x = 1. \end{cases}$$

#### Тема 4. Тригонометричні функції, рівняння

4.1 Обчисліть суму :

$$S = \frac{1}{\cos 1 \cos 2} + \frac{1}{\cos 2 \cos 3} + \dots + \frac{1}{\cos 2017 \cos 2018} \quad [3]$$

4.2 Розв'язати рівняння  $x^2 + 6x \sin x + 9 = 0$

4.3 Розв'язати рівняння  $(x - 2)^2 |\cos x| = \cos x$  [6]

#### Тема 5. Похідна та її застосування

5.1 При яких значеннях параметра  $a$  функція

$$y = e^{2x} + 2e^x(x - a - 2) - ax^2 + 2ax + 1 \text{ [5]}$$

5.2 Знайти всі значення параметра  $a$ , при яких функція  $f(x) = a \cdot 8^x + (3a + 1) \cdot 4^x + (9a + 1) \cdot 2^x + 2$  не має екстремумів. [5]

5.3 При яких значеннях параметра  $b$  функція  $f(x) = bx^5 - 20x^3 + 5(b + 9)x - 7$  монотонна при всіх  $x \in R$ ? [5]

#### Тема 6. Задачі з геометрії [1]

6.1 На стороні BC трикутника ABC позначено точку M так, що  $BM : MC = 3 : 10$ . У якому відношенні відрізок AM ділить медіану BK трикутника ABC?

6.2 У прямокутному трикутнику ABC до гіпотенузи AB проведено висоту CM. Площа трикутника ACM дорівнює  $6 \text{ см}^2$ , а площа трикутника BCM –  $54 \text{ см}^2$ . Знайдіть сторони трикутника ABC.

6.3 На медіані  $BD$  трикутника  $ABC$  позначено точку  $M$  так, що  $BM : MD = 3 : 1$ . Знайдіть площу трикутника  $ABC$ , якщо площа трикутника  $AMD$  дорівнює  $3 \text{ см}^2$ .

6.4. Більша діагональ ромба ділить його висоту, проведену з вершини тупого кута, на відрізки  $75$  і  $21$  см. Обчисліть площу ромба.

## Тема 7. Евристичні задачі олімпіадного характеру

7.1 Порівняйте вирази  $\frac{8^{2017} + 1}{8^{2018} + 1}$  і  $\frac{8^{2018} + 1}{8^{2019} + 1}$ . [6]

7.2 На лузі із постійною швидкістю росте трава. 12 корів повністю випасають луг за 4 дні, а 9 корів за 6 днів. За скільки днів випасуть луг 6 корів? [1]

7.3 Є 8 пакунків з цукерками вагою 1 кг, 2 кг, 3 кг, ..., 8 кг (на кожному пакунку написана його вага). В одну з упаковок поклали шматок сиру вагою 1 кг. Як за допомогою двох зважувань на терезах без гир знайти пакунок з сиром? [1]

7.4 Є дві десятилітрові бочки з розчином солі 10% і 15%. Є також три посудини ємністю 3 л, 4л, 5л. Як за допомогою переливань отримати один літр 12% розчину солі? [1]

7.5 Порівняйте вирази  $2016^{2017}$  і  $2017^{2016}$ . [6]

7.6 Знайдіть значення виразу:

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - 6^2 + \dots + 2015^2 - 2016^2. [2]$$

7.7 Яке з двох чисел більше:

$$2016^{2016} \cdot 2017^{2017} \quad \text{або} \quad 2017^{2017} \cdot 2016^{2016} \quad ? [6]$$

7.8 Є 10 мішків і у кожному з них по 10 золотих монет. Кожна монета важить 10 грамів. Є один мішок, в якому всі монети фальшиві і важать по 9 грамів. Як за одне зважування визначити, в якому мішку фальшиві монети? [4]

## Література

- 1Тренувальні вправи на канікули для майбутніх дев'ятикласників. Ліцей КП.
  - 2Сарана О.А. Математичні олімпіади: просте і складне поруч [Текст]: навчальний посібник / Олександр Анатолійович Сарана. – К.: Видавництво А.С.К., 2004. – 344 с.: іл.
  - 3Журнал «Математика в школах України».
  - 4Матеріали Всеукраїнських олімпіад.( <https://sites.google.com/site/matemolimp2009/>)
  - 5Горнштейн, Полонський, Якір Задачі з параметрами.
  - 6Авторські задачі. Опята Л.І.
- Матеріал запропонований ПЦК природничо-математичних дисциплін  
Новокаховського політехнічного коледжу ОНПУ.
- Голова ПЦК                      Опята Л.І.