

## Завдання для олімпіади з математики

1. При яких значеннях параметра  $a$  відношення коренів рівняння  $x^2 + ax + a + 2 = 0$  дорівнює двом?
2. Знайти значення  $p$  і  $q$  такі, щоб рівняння  $x^2 + px + q = 0$  мало своїми коренями числа  $p$  і  $q$ .
3. При яких значеннях  $a$  сума коренів квадратного рівняння  $x^2 + (2 - a - a^2)x - a^2 = 0$  дорівнює нулю?
4. При яких значеннях  $a$  квадратне рівняння  $x^2 - (a + 3)x + a^2 = 0$  має корінь  $x = 3$ ?
5. Знайти  $p$ , при яких квадратне рівняння має тільки один розв'язок.

$$(4x)^2 + \left(2^{\frac{1}{p} + 4} - 24\right)x + 1 = 0$$

6. Знайти всі значення  $a$  при яких система рівнянь не має розв'язків.  
$$\begin{cases} 2x + (9a^2 - 2)y = 3a \\ x + y = 1 \end{cases}$$

7. Знайти всі значення  $a$  при яких система рівнянь не має розв'язків.

$$\begin{cases} ax - 4y = a + 1 \\ 2x + (a + 6)y = a + 3 \end{cases}$$

Розв'язати системи рівнянь

8.  
$$\begin{cases} 4 \cdot 3^x + 2^{y-1} = 12,5 \\ 3^{2x+1} + 2^y = 28 \end{cases}$$

9.  
$$\begin{cases} 0,5 \cdot 3^{x+1} + 7,5 \cdot 5^{y-1} = 12 \\ 2 \cdot 9^x + 5^y = 23 \end{cases}$$

10.  
$$\begin{cases} 6 \lg \sqrt{x} + 3 \cdot 2^y = 5 \\ 10 \lg x^{\square} + 3 \cdot 4^y = 17 \end{cases}$$

11.  
$$\begin{cases} 4 \lg \sqrt{x} + 2^{y+1} = 3 \\ 24 \lg x^{\square} + 2 \cdot 4^{y+1} = 37 \end{cases}$$

12.  
$$\begin{cases} \log_2 x + \log_2 y = 4 \\ \log_4 (x + y) = \frac{3}{2} \end{cases}$$

13.  
$$\begin{cases} \lg 3 \cdot \lg(3x) = \lg 2 \cdot \lg(2y) \\ \lg x \cdot \lg 2^{\square} = \lg 3 \cdot \lg y \end{cases}$$

14.  
$$\begin{cases} \lg 5 \cdot \lg\left(\frac{5}{x}\right) = \lg 7 \cdot \lg\left(\frac{7}{y}\right) \\ \lg x \cdot \lg 7^{\square} = \lg 5 \cdot \lg y \end{cases}$$

15.  
$$\begin{cases} \log_2 x + \log_3 y^2 = 0 \\ \log_2 x^2 - \log_{\frac{1}{3}} y = 5 \end{cases}$$

Розв'язати рівняння.

- 16.

$$\frac{\frac{\sin x}{2} \sin 3x}{2} = \frac{1}{4} - \frac{\cos^2 x}{2}$$

17.

$$\sin 3x + \sin x + 2\cos x = \sin 2x + 2\cos^2 x$$

18.

$$\log_{\sin x}(1 - \cos 2x) = \log_{\sin x}^2 2$$

19.

$$4\cos 4x + 6\sin^2 2x + 5\cos 2x = 0$$

20.

$$\cos x - 2\sin 2x - \cos 3x = |1 - 2\sin x - \cos 2x|$$

21. Задача

Навколо кола описана трапеція з кутами при основі  $\alpha$  і  $\beta$ . Знайти відношення площі трапеції до площі круга

22. Задача

У рівнобедрений  $\triangle ABC$  вписаний ромб  $DECF$  так, що вершина  $E$  лежить на відрізку  $BC$ , вершина  $F$  лежить на відрізку  $AC$  і вершина  $D$  лежить на відрізку  $AB$ . Знайти сторону ромба, якщо  $AB=BC=12$ ,  $AC=6$ .

23. Задача

На площині заданий прямий кут. Коло з центром, поза цим кутом, дотикається до продовження однієї із його сторін, перетинає іншу сторону в точках  $A$  і  $B$  і

перетинає бісектрису цього кута в точках  $C$  і  $D$ ;  $AB=$  ,  $CD=2$ . Знайти радіус кола.

24. Задача

Кут біля основи рівнобедреного  $\triangle ABC$  дорівнює  $\alpha$  ( $\alpha > 45^\circ$ ) а площа дорівнює  $S$ . Знайти площу трикутника вершинами якого являються основи висот  $\triangle ABC$ .

25. Задача

Хорда  $AB$  спирається на дугу кола, яка дорівнює  $120^\circ$ . Точка  $C$  лежить на цій дузі, а точка  $D$  лежить на хорді  $AB$ . При цьому  $AD=2$ ,  $BD=1$ ,  $DC=\sqrt{2}$ . Знайти площу  $\triangle ABC$ .

Викладач Гуліда С.І.