

Тема 1. Тотожні перетворення виразів, що містять ірраціональності, модулі, параметри

1. Обчислити: $\left(\sqrt[6]{3+2\sqrt{2}} + \sqrt[3]{1+\sqrt{2}}\right) \cdot \sqrt[3]{1-\sqrt{2}}$.

2. Спростити вираз: $\sqrt[4]{28-16\sqrt{3}} - \sqrt{3}$.

Тема 2. Раціональні та ірраціональні рівняння та їх системи, рівняння та системи рівнянь з модулями і параметрами

1. Знайдіть хоча б один розв'язок рівняння $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{90}$ в натуральних числах.

2. Розв'язати систему рівнянь:
$$\begin{cases} x + y = 2, \\ xy + xz + yz = 5, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 6. \end{cases}$$

3. Розв'язати рівняння: $\sqrt{x} + \sqrt{x+5} + 2\sqrt{x^2+5x} = 25 - 2x^2$.

4. При яких значеннях a квадратні рівняння $x^2+ax+1=0$ та $x^2+x+a=0$ мають спільний корінь?

Тема 3. Показникові та логарифмічні функції, рівняння, нерівності та їх системи

1. Розв'язати рівняння $10^{\lg^2 x} + x^{\lg x} = 20$.

2. Довести нерівність: $\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right) \geq 9$, якщо $x + y = 1$, $x > 0$, $y > 0$.

Тема 4. Тригонометричні функції, рівняння

1. Спростити вираз: $\left(\frac{\sin \alpha + \sin 3\alpha}{\cos \alpha + \cos 3\alpha}\right)(1 + \cos 4\alpha)$

2. Побудуйте графік функції $y = \sqrt{4\sin^4 x - 2\cos 2x + 3} + \sqrt{4\cos^4 x + 2\cos 2x + 3}$

3. Обчисліть суму: $\cos 20^\circ + \cos 40^\circ + \cos 60^\circ + \dots + \cos 160^\circ + \cos 180^\circ$

Тема 5. Похідна та її застосування

1. Відомо, що $f(x)$ – квадратична функція, причому $f(0) = 3$, $f'(0) = -1$, а $f''(0) = 2$. Знайдіть значення $f(4)$.
2. Число 48 подайте у вигляді суми двох додатних чисел так, щоб їх добуток був найбільшим.

Тема 6. Задачі з геометрії

1. На іграшкову хатку у формі куба з ребром 10см поставили дах у вигляді чотирикутної правильної піраміди, в якій основа дорівнює грані куба, а висота в два рази більша ніж ребро куба. Скільки фарби потрібно на пофарбування даху, якщо її витрата складає 1л на 1 м^2 поверхні? Відповідь обґрунтуйте.
2. На сторонах BC, CA, AB трикутника ABC взяті точки A_1, B_1, C_1 такі, що $BA_1 : AC_1 = CB_1 : A_1A = AC_1 : C_1B = 1 : 2$. При перетині відрізків AA_1, BB_1, CC_1 утворюється трикутник. Знайдіть відношення площі цього трикутника до площі трикутника ABC.

7. Евристичні задачі

1. Знайти шестицифрове ціле число, яке починається з цифри 1 і таке, що при переставленні цієї цифри в кінець дістанемо число, утричі більше від шуканого.
2. На стелі кімнати сидить муха. Відстань від неї до трьох з чотирьох нижніх кутів кімнати дорівнює 3м, 4м і 5м. Чому дорівнює відстань від мухи до четвертого нижнього кута, якщо відомо, що вона більша за всі інші?

